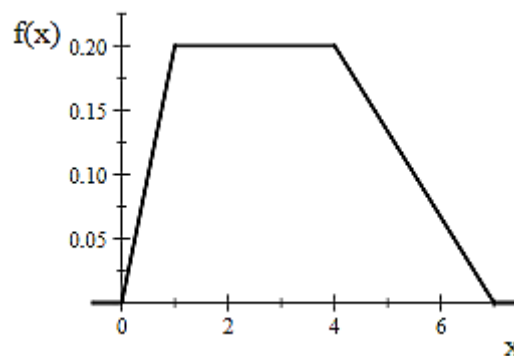


## INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA – PROBLEMAS – TEMA 5

1. Los empleados de una empresa pasan ocho horas diarias en su lugar de trabajo. El tiempo (en horas) que un empleado de esta empresa dedica realmente al trabajo cada día es una variable aleatoria (v. a.) continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{32} & \text{si } x \in [0, 8] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 8] \end{cases}$$

- a. Representa la función de densidad.
  - b. Indica sobre el gráfico del apartado anterior a qué corresponde la probabilidad de que un empleado trabaje menos de 6 horas, y calcula esta probabilidad.
  - c. Calcula la probabilidad de que un empleado trabaje exactamente 6 horas.
  - d. Si sabemos que un empleado ha trabajado más de 6 horas, ¿cuál es la probabilidad de que haya trabajado menos de 7 horas y media?
2. El gráfico siguiente muestra la función de densidad  $f(x)$  de la v.a. continua que indica la distancia (en kilómetros) que una ambulancia recorre cuando recibe un aviso.



- a. ¿Cuál es la probabilidad de que la ambulancia recorra menos de dos kilómetros?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que la ambulancia recorra tres o más kilómetros?
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que la ambulancia recorra tres kilómetros?
- d. ¿Es posible que la ambulancia recorra más de ocho kilómetros?

- e. Hoy se han recibido dos avisos. Suponiendo independencia entre las distancias que la ambulancia recorre en cada uno de estos dos avisos, ¿cuál es la probabilidad de que tanto en el primer aviso como en el segundo aviso haya tenido que recorrer más de dos kilómetros?
3. El salario anual (en decenas de miles de euros) de un trabajador seleccionado al azar en una población es una v.a. continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} c(6x - x^2) & \text{si } x \in [2, 5] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- a. Determina el valor constante  $c$  y representa la función de densidad.
- b. Calcula cuál es la probabilidad de que el trabajador seleccionado tenga un salario anual inferior a treinta mil euros, e indica sobre el gráfico de la función de densidad realizado en el apartado anterior a qué corresponde esta probabilidad.
- c. ¿Cuál es el salario mínimo que recibe un trabajador de esta población? ¿Cuál es el máximo?
- d. ¿Qué porcentaje de trabajadores de esta población tiene salario anual superior a cuarenta mil euros? ¿qué porcentaje de trabajadores de esta población tiene salario anual superior a sesenta mil euros?
4. El tiempo de vida (en días) de una bombilla es una v.a. continua  $X$  con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 100 \\ 1 - \frac{100}{x} & \text{si } x \geq 100 \end{cases}$$

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla dure menos de 90 días?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla dure más de un año?
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla dure entre uno y dos años?
- d. Un foco consta de 8 bombillas que funcionan independientemente; se acaban de poner 8 bombillas nuevas en el foco. ¿Cuál es la probabilidad de que dentro de un año el número de bombillas del foco que todavía funcionan se exactamente igual a 3?

5. Sea  $X$  una v.a. continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{3}{16}x^2 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 2 \end{cases}$$

- Representa la función de densidad de  $X$ .
- A la vista del gráfico obtenido en el apartado anterior, ¿crees que la esperanza de  $X$  es menor que 1, igual a 1 o mayor que 1?
- Calcula la esperanza de  $X$ .
- Calcula  $E(X^3)$ . ¿Coincide este valor con  $E(X)^3$ ?

6. La longitud (en centímetros) de un tornillo fabricado por una máquina es una v.a. continua  $X$  con función de distribución:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \in (1, 2) \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de un tornillo esté comprendida entre 1.4 y 1.8 centímetros?
- Calcula la longitud media de los tornillos.
- Calcula la probabilidad de que la longitud de un tornillo sea superior a la longitud media de los tornillos.
- Mañana llegará un revisor y examinará la longitud de un tornillo; si el resultado no es satisfactorio la máquina será retirada. Sabemos que un 5% de los revisores son muy exigentes, y retiran la máquina si la longitud del tornillo examinado no está entre 1.4 y 1.8 centímetros; un 10% de los revisores son medianamente exigentes, y retiran la máquina si la longitud del tornillo examinado no está entre 1.2 y 2 centímetros; y el 85% restante son revisores poco exigentes, y retiran la máquina si la longitud del tornillo examinado es inferior a 1 centímetro. No sabemos qué tipo de revisor vendrá. ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina sea retirada mañana?

7. La ganancia neta (en millones de euros) de una inversión es una v.a. continua  $X$  con función de densidad:

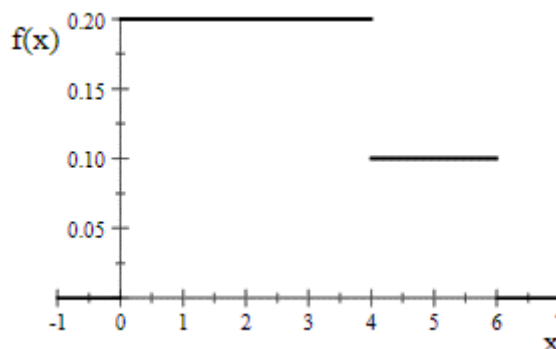
$$f(x) = \begin{cases} a(1 - x^2) & \text{si } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- a. Determina el valor constante  $a$ .
- b. Representa la función de densidad de  $X$  y, a la vista del gráfico, indica cuál crees que es la media de  $X$ .
- c. Calcula la media de  $X$ .
- d. La ganancia neta (en millones de euros) de otra inversión es otra v.a. continua  $X_*$  con función de densidad:

$$f_*(x) = \begin{cases} \frac{1}{18} (9 - 4x^2) & \text{si } x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- d1. Representa la función de densidad de  $X_*$  y, a la vista del gráfico, indica cuál crees que es la media de  $X_*$
- d2. Comparando el gráfico obtenido en el apartado **b** con el obtenido en el subapartado d1, ¿crees que  $X_*$  tiene más variabilidad que  $X$ , menos variabilidad que  $X$  o la misma?
- d3. Calcula las varianzas de  $X$  y de  $X_*$  y compáralas.

8. El gráfico siguiente muestra la función de densidad  $f(x)$  de la v.a. continua que indica el gasto (en miles de euros) que tiene que afrontar una compañía médica por uno de sus clientes durante un año.



- a. ¿Cuál es la probabilidad de que el gasto que tendrá que afrontar esta compañía médica por uno de sus clientes durante un año esté entre 1.000 y 5.000 €?
- b. Calcula la media y la varianza del gasto que tiene que afrontar esta compañía médica por uno de sus clientes durante un año.
- c. La compañía ha decidido que cada año cobrará a cada cliente una cantidad fija de 2.500 € más el 10% de los gastos que haya ocasionado. Calcula la esperanza y la varianza del beneficio que obtendrá la compañía por cada cliente en un año.
9. El responsable de empleo de una población afirma que en esa población el tiempo (en meses) que tarda un joven con título universitario en encontrar empleo tras terminar sus estudios es un v.a. con distribución uniforme entre 0 y 48.
- a. Supongamos que lo que afirma el responsable de empleo es cierto.
- a1. ¿Cuál es la probabilidad de que un joven de esa población con título universitario tarde más de 3 años en encontrar empleo tras terminar sus estudios?
- a2. ¿Cuáles son la media y la desviación típica del tiempo que tarda un joven de esa población con título universitario en encontrar empleo tras terminar sus estudios?
- a3. Seleccionamos a un joven de esa población con título universitario y nos dice que hace 15 meses que terminó sus estudios, y aún no ha encontrado empleo. ¿Cuál es la probabilidad de que este joven tarde más de 3 años en encontrar empleo tras terminar sus estudios?
- b. Hemos preguntado a 60 jóvenes de esa población con título universitario cuánto tiempo tardaron en encontrar empleo tras terminar sus estudios; 4 dijeron que tardaron menos de 1 año, 8 dijeron que tardaron entre 1 y 2 años, 20 dijeron que tardaron entre 2 y 3 años, y los 28 restantes dijeron que tardaron entre 3 y 4 años. Teniendo en cuenta estos datos, ¿te parece verosímil lo que afirma el responsable de empleo de esa población?
10. Se va a sacar a subasta la realización de un proyecto. En esta subasta participarán únicamente nuestra empresa y la empresa de la competencia; la realización del proyecto de adjudicará a la empresa que pida menor cantidad de dinero por llevarlo a cabo. Se sabe que la cantidad que pedirá la empresa de la competencia

por realizar el proyecto es una v.a. con distribución uniforme entre 8 y 20 millones de euros.

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa de la competencia pida menos de 10 millones de euros por realizar el proyecto?
- b. Si nuestra empresa pide 12 millones de euros por realizar el proyecto, ¿cuál es la probabilidad de que el proyecto se adjudique a nuestra empresa?
- c. Sabemos que el coste total que tendría que asumir nuestra empresa por realizar el proyecto, en caso de que le sea adjudicado, es de 10 millones de euros. Si nuestra empresa pide 12 millones de euros por realizar el proyecto, ¿cuál será el beneficio esperado?
- d. Suponiendo, como en el apartado previo, que el coste total que tendría que asumir nuestra empresa por realizar el proyecto es de 10 millones de euros, calcula cuál es la cantidad  $m$  de millones de euros que nuestra empresa debe pedir por realizar el proyecto para que el beneficio esperado sea máximo.

11. Responde razonadamente a las siguientes preguntas.

- a. Si  $X$  es una v.a. continua y su función de distribución  $F(x)$  cumple que  $F(5) = 1$ , ¿podemos asegurar que la esperanza de  $X$  es menor o igual que 5?
- b. La nota que obtiene un estudiante de Microeconomía es una v.a. continua con media 6 puntos y varianza 4 puntos<sup>2</sup>. La nota que obtiene un estudiante en Macroeconomía es una v.a. continua con media 5 puntos y varianza 2.25 puntos<sup>2</sup>. Si un estudiante ha obtenido un 8.5 en Microeconomía y un 7 en Macroeconomía, ¿en cuál de las dos asignaturas ha obtenido mejor nota tipificada?; ¿qué quiere decir este resultado?
- c. Si  $X$  es una v.a. con distribución uniforme entre 1 y 2, ¿cuánto es  $E\left(\frac{1}{X}\right)$ ?

12. Sea  $X$  una v.a. con distribución  $N(10; 2^2)$ . Utilizando Excel, o bien algunos de los resultado obtenidos con Excel que aparecen en la tabla que se da al final de esta hoja de problemas, calcula:

- a.  $P(X \leq 12)$ .
- b.  $P(X \geq 11)$ .
- c.  $P(|X - 9| \leq 3)$ .
- d.  $P(|X - 9| > 2)$ .

e. El percentil 90 de  $X$ .

13. El peso (en kilos) de un hombre elegido al azar en una cierta población es una v.a. con distribución normal  $N(80; 4^2)$ .

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre pese menos de 75 kilos?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre pese más de 85 kilos?
- c. Justifica con un gráfico por qué son iguales las probabilidades calculadas en los apartados anteriores.
- d. ¿Qué porcentaje de hombres pesan entre 54 y 84 kilos?
- e. Si el 80% de los hombres de esta población pesan menos que Juan, ¿cuánto pesa Juan?
- f. Si el 60% de los hombres de esta población pesan más que José, ¿cuánto pesa José?
- g. Calcula cuál ha de ser el valor  $c$  para que sea cierto que dentro del intervalo  $[80 - c, 80 + c]$  está el peso del 98% de los hombres de esta población.

14. Una entidad ofrece la posibilidad de invertir en un activo cuyo interés (en tanto por ciento) es una v.a.  $X$  con distribución normal  $N(6; 1.5^2)$ .

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que el activo produzca un interés inferior al 4%?
- b. Representa gráficamente la función de densidad de  $X$  e indica sobre ese gráfico a qué corresponde la probabilidad calculada en el apartado anterior.
- c. La entidad ha decidido anunciar este activo con el siguiente mensaje: "Con una probabilidad del 99% este activo le producirá un interés superior al  $m\%$ ". ¿Qué valor de  $m$  debe ponerse en este mensaje para que el anuncio sea cierto?
- d. La entidad ofrece también la posibilidad de invertir en otro activo cuyo interés (en tanto por ciento) tiene distribución  $N(6; \sigma^2)$ , y permite que el cliente decida el valor de  $\sigma$ . Si el cliente quiere que la probabilidad de que la inversión produzca un interés inferior al 4% sea exactamente 0.05, ¿qué valor de  $\sigma$  debe escoger?

**15.** Un profesor indica que el tiempo (en minutos) empleado por un estudiante en resolver una hoja de ejercicios es una v.a.  $X$  con distribución normal de media 150 minutos y varianza 900 minutos<sup>2</sup>.

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo empleado por un estudiante en resolver una hoja de ejercicios NO esté comprendido entre 140 y 170 minutos?
- b. Si sabemos que un estudiante ha tardado menos de 170 minutos en resolver la hoja de ejercicios, ¿cuál es la probabilidad de que haya tardado 140 minutos o más?
- c. Calcula  $P(|X - 135| \leq 15)$ .
- d. ¿Cuántos minutos tarda un estudiante en resolver una hoja de ejercicios si el 95% de sus compañeros tardan más que él?
- e. Llamemos  $Z$  a la v.a. tipificada asociada a  $X$ . Calcula cuál ha de ser el valor de  $k$  para que sea cierta la igualdad  $P(X < 210) = P(Z < k)$ .

**16.** La cantidad de principio activo que contiene un frasco de fertilizante es una v.a.  $X$ .

- a. Supongamos que  $X$  tiene una distribución normal con media 10 gramos y desviación típica 3 gramos.

**a1.** Un frasco de fertilizante se considera defectuoso si contiene menos de 6 gramos de principio activo o más de 15 gramos de principio activo. ¿Cuál es la probabilidad de que un frasco de fertilizante sea defectuoso?

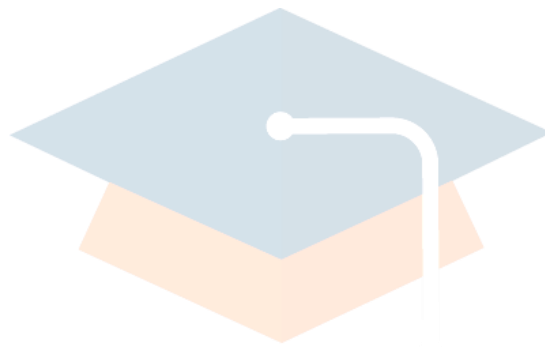
**a2.** Una caja de frascos de fertilizante contiene 16 frascos. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja contenga exactamente 2 frascos defectuosos?

**a3.** El coste (en euros) que tiene un frasco con  $X$  gramos de principio activo es  $\frac{X+9}{2}$  euros. ¿Cuál es la media de la variable coste?; ¿cuál es su varianza?; ¿es su distribución uniforme, normal, o no puede saberse qué tipo de distribución tiene? Justifica tus respuestas.

- b. Hemos observado la cantidad de principio activo contenida en 500 frascos de fertilizante. En 24 frascos la cantidad de principio activo era inferior a 4 gramos, en 43 frascos la cantidad de principio activo estaba entre 4 y 8 gramos, en 364 frascos la cantidad de principio activo estaba entre 8 y 12 gramos, en 44 frascos la cantidad de principio activo estaba entre 12 y 16 gramos, y en los 25 frascos restantes la cantidad de principio activo estaba entre 16 y 20 gramos. Con estos datos la media



muestral aproximada que se obtiene es  $\bar{X} \approx 10.02$  gramos, y la varianza muestral aproximada es  $S^2 \approx 9.07$  gramos<sup>2</sup>, luego el supuesto de que la media de X es 10 y su varianza es 9 parece razonable. Ahora bien, con estos datos, ¿te parece razonable suponer que la distribución de X es normal?



# aCCadem

# Universidad

### Resultados obtenidos con Excel (PROBLEMA 12)

x	DISTR.NORM.N(x;10;2;0)	DISTR.NORM.N(x;10;2;1)	p	INV.NORM(p;10;2)
5,0	0,0088	0,0062	0,02	5,8925
5,2	0,0112	0,0082	0,04	6,4986
5,4	0,0142	0,0107	0,06	6,8905
5,6	0,0177	0,0139	0,08	7,1899
5,8	0,0220	0,0179	0,10	7,4369
6,0	0,0270	0,0228	0,12	7,6500
6,2	0,0328	0,0287	0,14	7,8394
6,4	0,0395	0,0359	0,16	8,0111
6,6	0,0470	0,0446	0,18	8,1693
6,8	0,0555	0,0548	0,20	8,3168
7,0	0,0648	0,0668	0,22	8,4556
7,2	0,0749	0,0808	0,24	8,5874
7,4	0,0857	0,0968	0,26	8,7133
7,6	0,0971	0,1151	0,28	8,8343
7,8	0,1089	0,1357	0,30	8,9512
8,0	0,1210	0,1587	0,32	9,0646
8,2	0,1330	0,1841	0,34	9,1751
8,4	0,1448	0,2119	0,36	9,2831
8,6	0,1561	0,2420	0,38	9,3890
8,8	0,1666	0,2743	0,40	9,4933
9,0	0,1760	0,3085	0,42	9,5962
9,2	0,1841	0,3446	0,44	9,6981
9,4	0,1907	0,3821	0,46	9,7991
9,6	0,1955	0,4207	0,48	9,8997
9,8	0,1985	0,4602	0,50	10,0000
10,0	0,1995	0,5000	0,52	10,1003
10,2	0,1985	0,5398	0,54	10,2009
10,4	0,1955	0,5793	0,56	10,3019
10,6	0,1907	0,6179	0,58	10,4038
10,8	0,1841	0,6554	0,60	10,5067
11,0	0,1760	0,6915	0,62	10,6110
11,2	0,1666	0,7257	0,64	10,7169
11,4	0,1561	0,7580	0,66	10,8249
11,6	0,1448	0,7881	0,68	10,9354
11,8	0,1330	0,8159	0,70	11,0488
12,0	0,1210	0,8413	0,72	11,1657
12,2	0,1089	0,8643	0,74	11,2867
12,4	0,0971	0,8849	0,76	11,4126
12,6	0,0857	0,9032	0,78	11,5444
12,8	0,0749	0,9192	0,80	11,6832
13,0	0,0648	0,9332	0,82	11,8307
13,2	0,0555	0,9452	0,84	11,9889
13,4	0,0470	0,9554	0,86	12,1606
13,6	0,0395	0,9641	0,88	12,3500
13,8	0,0328	0,9713	0,90	12,5631
14,0	0,0270	0,9772	0,92	12,8101
14,2	0,0220	0,9821	0,94	13,1095
14,4	0,0177	0,9861	0,96	13,5014
14,6	0,0142	0,9893	0,98	14,1075